На правах рукописи

СУХОНОС Андрей Григорьевич

ПУЧКОВЫЕ КОГОМОЛОГИИ И РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ ЧУ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Владивосток - 2011

Работа выполнена в Институте прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, доцент
Скурихин Евгений Евгеньевич

Официальные оппоненты
доктор физико-математических наук, профессор
Зарелуа Александр Владимирович

кандидат физико-математических наук
Копылов Ярослав Анатольевич

Ведущая организация
Институт систем информатики им. А.П. Ершова Сибирского отделения РАН

Защита состоится 31 августа 2011 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «21» июля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А.Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория пучков на топологических пространствах доказала свою эффективность в решении задач топологии, алгебраической геометрии, теории функций многих комплексных переменных. А. Гротендик ввел понятие топологии на произвольной категории, обобщил и углубил теорию пучков и пучковых когомологий. Однако, приложением (и главной целью) этой теории является теория этальных когомологий, применяемая для решения задач алгебраической геометрии. В то же время, общность исходных понятий позволяет рассчитывать на эффективное применение теории Гротендика и в других ситуациях.

В данной диссертационной работе в рамках теории Гротендика строится теория пучков и пучковых когомологий нормальных пространств Чу.

Конструкция Чу, которая привела позже к понятию пространства Чу, появилась в магистерской диссертации По Хсианг Чу (Po-Hsiang-Chu), относящейся к теории категорий, и была опубликована в 1979г. Название «пространство Чу» предложено М. Барром в 1993г. Нормальные пространства Чу над алфавитом $\Sigma = \{0,1\}$ впервые появились в работе Гупта под названием частично упорядоченные решетки (pdlat) в 1993г.

В терминах пространств Чу интерпретировались многие понятия и результаты, относящиеся к физике и механике. Пространства Чу изучались также в связи с линейной логикой, структурами событий, информационными системами. В свою очередь структуры событий связывались с асинхронными системами переходов и сетями Петри. Для изучения некоторых из этих объектов удалось применить гомологические методы. В частности, строились и изучались теории гомологий асинхронных систем переходов и сетей Петри. Объектами, связанными с computer science, являются автоматы высшей размерности. Они также изучались методами алгебраической топологии.

Тот факт, что при изучении перечисленных объектов оказались эффективными некоторые методы алгебраической топологии, делает актуальным вопрос об использовании теории пучков.

Цель исследования. В рамках теории сайтов Гротендика построить теорию пучков и пучковых когомологий на пространствах Чу. Изучить структуры на нормальных пространствах Чу, задаваемые естественно возникающими на них топологиями Гротендика. Применить полученные результаты к информационным системам и структурам событий.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались методы гомологической алгебры, теории пучков на сайтах Гротендика и теории пучковых когомологий частично упорядоченных множеств.

Достоверность полученных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами всех предложений и теорем, представленных в работе.

Основные результаты:

1. Предложен метод задания топологии Гротендика на нормальном пространстве Чу. Построена теория пучков и пучковых когомологий на пространствах Чу и введено содержательное понятие размерности.

2. Доказано, что когомологии Гротендика и Чеха пространств Чу изоморфны, а также, что когомологии Чеха с коэффициентами в абелевом предпучке изоморфны когомологиям с коэффициентами в порожденном пучке.

3. Даны когомологические характеристики размерности и дуальной размерности нормального пространства Чу.

4. Разработана теория вялых пучков и вялых размерностей нормальных пространств Чу. Доказана ацикличность вялых пучков. Доказано неравенство $Br \leq dim + 1$, где dim – размерность, а Br – размерность Бредона нормального пространства Чу, определяемая по аналогии с размерностью Бредона топологических пространств.

5. Нормальные пространства Чу ассоциируются с

частично упорядоченными множествами, структурами событий, информационными системами, сетями Петри. Характеристики указанных объектов интерпретируются, как размерности соответствующих пространств Чу и могут быть определены с помощью пучковых когомологий. В частности, длина и ширина частично упорядоченного множества интерпретируется, как когомологическая размерность соответствующих нормальных пространств Чу..

Новизна и научная значимость работы. Результаты диссертации являются новыми и носят теоретический характер. Они могут быть применены для изучения сайтов Гротендика, пространств Чу, структур событий, информационных систем.

Апробация работы. Результаты диссертации представлялись автором на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» Института математики СО РАН (Новосибирск, 2011), на семинаре отдела анализа и геометрии Института математики СО РАН (Новосибирск, 2011), на семинаре Института Прикладной математики ДВО РАН (Владивосток, 2005 – 2011), Института математики и компьютерных наук ДВГУ (Владивосток, 2010), а также на следующих международных конференциях и школах–семинарах: конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2004), научная конференция «Ломоносовские чтения» (Севастополь, 2005), Дальневосточная математическая школа - семинар им. ак. Е.В. Золотова (Хабаровск, 2005), Российская школа-семинар «Синтаксис и семантика логических систем» (Владивосток, 2008), международная конференция «Современные проблемы анализа и геометрии» (Новосибирск, 2009), 3-я Российская школа-семинар «Синтаксис и семантика логических систем» (Иркутск, 2010), Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова (Владивосток, 2010).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [1-13], три из которых выполнены в соавторстве с Е.Е. Скурихиным [11, 12, 13].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 56 использованных источников. Общий объем диссертации — 118 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описываются основные результаты диссертации и дается краткий обзор исследований по теме диссертации.

Глава 1 **«Нормальные пространства Чу»** содержит основные сведения о пространствах Чу, необходимые для дальнейшего изложения. В ней также вводятся и изучаются топологии Гротендика на пространствах Чу и понятие размерности.

Тройка $\mathcal{A} = (A, r, X)$, где $r : A \times X \longrightarrow \Sigma$ отображение множеств, называется *пространством Чу над алфавитом* Σ или просто *пространство Чу*.

Если для любых $x, y \in X$ существует $a \in A$ такое, что $r(a,x) \neq r(a,y)$, то пространство Чу называется *отделимым*. Если для любых $a, b \in A$ существует $x \in X$ такое, что $r(a,x) \neq r(b,x)$, то пространство Чу называется *коотделимым*. Отделимое и коотделимое пространство Чу называется *биотделимым*.

Пространство Чу $(X, r^{\perp}, A)$, где $r^{\perp}(x,a) = r(a,x)$, называется *дуальным* к пространству Чу $\mathcal{A} = (A, r, X)$ и обозначается $\mathcal{A}^{\perp}$. Из определения вытекает, что $\mathcal{A}^{\perp\perp} = \mathcal{A}$.

Пространство Чу, где каждая область является функцией из A в Σ, то есть $X \subseteq \Sigma^A$, и r задается равенством $r(a,f) = f(a)$, называется *нормальным пространством Чу над алфавитом* Σ или просто *нормальным пространством Чу* и обозначается (A, X).

Дуальным нормальным пространством Чу к нормальному пространству Чу (A, X) называется нормальное пространство Чу (X, B), где $B = \{b_a \in \Sigma^X | \ a \in A$ и для любого $x \in X$ имеет место $b_a(x) = x(a)\}$. Понятие дуальности для нормального пространства Чу отличается от понятия дуальности в категории произвольных пространств Чу, но для коотделимых пространств Чу эти понятия фактически совпадают.

Основные результаты данной работы формулируются и доказываются в терминах нормальных пространств Чу. Поэтому в параграфе 1 **«Общие свойства нормальных пространств Чу»** изучается категория нормальных пространств Чу и приводятся результаты о связи некоторых категорий пространств Чу с категориями нормальных пространств Чу. В частности, дается новое и более удобное для наших целей описание гомоморфизмов нормальных пространств Чу (Лемма 1.1.10).

Во втором параграфе **«Размерности нормального пространства Чу»** определяется топология Гротендика на нормальном пространстве Чу и вводится понятие размерности нормального пространства Чу. Начиная с этого параграфа рассматриваются только нормальные пространства Чу над алфавитом $\Sigma = \{0,1\}$. В связи с этим $\Sigma = 2^A$ может отождествляться с множеством всех подмножеств A.

Топологией Гротендика на нижней полурешетке K называется отображение τ, сопоставляющее каждому $a \in K$ класс $\tau(a)$ семейств вида $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\}$ такой, что выполнены 4 условия:

$\tau 1)$ $\{a\} \in \tau(a)$;

$\tau 2)$ если $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ и $b \leq a$, тогда $\alpha \wedge b = \{a_i \wedge b \in K | i \in I\} \in \tau(b)$;

$\tau 3)$ если $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ и $\alpha_i = \{a_{ij} \in K | j \in J\} \in \tau(a_i)$ $(i \in I)$, то $\beta = \{a_{ij} \in K | i \in I, j \in J\} \in \tau(a)$;

$\tau 4)$ если $\beta = \{b_j \leq a | j \in J\}$ и существует $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ такое, что $\alpha \prec \beta$, тогда $\beta \in \tau(a)$.

Любое $\alpha \in \tau(a)$ называется τ-покрытием a.

Определим X-топологию Гротендика τ на множестве 2^A следующим образом. Если $a \in 2^A$, то $\alpha = \{a_i \in 2^A \mid i \in I\} \in \tau(a)$ в том и только в том случае, когда $\bigcup\limits_{i \in I} a_i = a$ и $X \cap a \prec \alpha$. Обозначим $X_a = X \cap a$ и через $X_a^{\#}$ будем обозначать множество *всех максимальных* *по включению подмножеств* X_a. Через β_a будем обозначать *семейство* $\beta_a = X_a^{\#} \cup \{\{u\} \mid u \in a,\ u \notin \cup X\}$.

Кратностью крα семейства $\alpha = \{a_i \in 2^A \mid i \in I\}$ называется $sup\{|\sigma| \mid \bigcap\limits_{i\in\sigma} a_i \neq \emptyset, \sigma \subset I\}$, где $|\sigma|$ – мощность множества σ. Число n называется τ*-размерностью* a, если в каждое τ-покрытие можно вписать τ-покрытие a кратности $\leq n+1$, и имеется τ-покрытие a кратности $n+1$, в которое нельзя вписать τ-покрытие a меньшей кратности. τ*-размерность элемента* a будем обозначать через $\tau Dim(a)$. Если $a = A$, то $\tau Dim(A)$ называется размерностью нормального пространства Чу и обозначается $Dim(A,X)$. Чаще всего, мы будем предполагать на множестве X выполнение условия

$$\forall x \in X\ \exists y \in X^{\#} : x \subset y. \tag{1}$$

Ясно, что оно выполняется, если множество X – конечно, либо все $x \in X$ имеют ограниченную конечную мощность. В частности, если A – конечно, то условие (1) выполняется как для пространства (A,X), так и для дульного ему нормального пространства.

Теорема 1.2.8. Пусть (A,X) – нормальное пространство Чу, удовлетворяющее условию (1), $a \in 2^A$ и $X_a \neq \emptyset$. Тогда следующие условия эквивалентны

(1) $\tau Dim(a) = n$;

(2) кр$\beta_a = n+1$;

(3) кр$X_a^{\#} = n+1$.

Теорема 1.2.9. (О монотонности размерности)

Пусть (A,X) – нормальное пространство Чу, удовлетворяющее условию (1). Тогда $\tau Dim(a) \leq \tau Dim(b) \leq Dim(A,X)$ для любых $a \subseteq b \subseteq A$.

Пусть $(X,B) = (A,X)^{\perp}$ – нормальное пространство Чу, дуальное к нормальному пространству Чу (A,X). Тогда число $Dim(X,B)$ будем называть *дуальной* τ*-размерностью нормального пространства Чу* (A,X) и обозначать $Dim^{\perp}(A,X)$.

Важные характеристики нормального пространства Чу выражаются через размерность дуального пространства Чу. Введем обозначения: $b_a = \{x \in X \mid a \in x\}$ и $\bar{X} = \{x \setminus \{a\} \mid x \in X^{\#}, a \in A\}$.

Теорема 1.2.13. Пусть (A, X) – нормальное пространство Чу, удовлетворяющее условию (1), $\bar{X} \subset X$. Тогда $Dim^{\perp}(A, X) = n$ в том и только в том случае, если для любого $x \in X$ имеет место $|x| \leq n+1$, и существует $x \in X$ такой, что $|x| = n+1$.

Во второй главе **«Пучковые когомологии нормальных пространств Чу»** развивается теория пучков на нормальных пространствах Чу.

В параграфе 1 **«Пучки на нижних полурешетках»** приводятся основные определения, связанные с пучками на нижних полурешетках, и стандартные результаты о категориях пучков, являющиеся следствиями известных общих результатов о пучках на сайтах Гротендика. Дан также критерий того, что абелев предпучок на нормальном пространстве Чу является локально-нулевым.

Во втором параграфе **«Основные свойства когомологий с коэффициентами в пучке»** изучаются когомологии Александрова-Чеха и когомологии Гротендика на нормальных пространствах Чу.

Пусть (A, X) – нормальное пространство Чу, τ – X-топология Гротендика на 2^A, $a \in 2^A$, S_τ – категория абелевых τ-пучков на 2^A и $\alpha = \{a_i \leq a \mid i \in I\}$ – семейство элементов. Функторы $\Gamma_{\tau,a}$, $\Gamma_{\tau,\alpha}$ и $\Gamma_{\tau,a,\alpha} : S_\tau \to Ab$ задаются следующим образом: $\Gamma_{\tau,a}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(a)$, $\Gamma_{\tau,\alpha}(\mathcal{A}) = H^0(\alpha, \mathcal{A})$ и $\Gamma_{\tau,a,\alpha}(\mathcal{A}) = ker\{\mathcal{A}(a) \to H^0(\alpha, \mathcal{A})\}$.

Определим когомологии Гротендика $H^n_\tau(a, \mathcal{A})$, $H^n_\tau(\alpha, \mathcal{A})$ и $H^n_\tau(a, \alpha, \mathcal{A})$ с коэффициентами в абелевом предпучке $\mathcal{A}$, как значения на τ-пучке, порожденном предпучком $\mathcal{A}$, n-х правых производных функторов $\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,a}$, $\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,\alpha}$ и $\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,a,\alpha}$. А именно, $H^n_\tau(a, \mathcal{A}) = (\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,a})(S_\tau(\mathcal{A}))$, $H^n_\tau(\alpha, \mathcal{A}) = (\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,\alpha})(S_\tau(\mathcal{A}))$ и $H^n_\tau(a, \alpha, \mathcal{A}) = (\mathcal{R}^n\Gamma_{\tau,a,\alpha})(S_\tau(\mathcal{A}))$, где $S_\tau(\mathcal{A})$ – τ-пучок, порожденный предпучком $\mathcal{A}$.

Когомологии Александрова-Чеха $H^n(\alpha, \mathcal{A})$ и $\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A})$ определяются аналогично тому, как это делается для топологических пространств (определение 2.2.8).

Доказывается, что когомологии Александрова–Чеха изоморфны когомологиям Гротендика.

Теорема 2.2.11. Пусть (A, X) – нормальное пространство Чу, удовлетворяющее условию (1), τ – X-топология Гротендика на 2^A, $\mathcal{A}$ – предпучок на 2^A и $a \in 2^A$. Тогда для любого $n \geq 0$ имеет место

1) $H^n_\tau(\beta_{a,M} \wedge c, \mathcal{A}) = H^n(\beta_{a,M} \wedge c, \tilde{\mathcal{A}}) = H^n(\beta_{a,M} \wedge c, \mathcal{A})$, где $\beta_a = \{b_j \in 2^A \mid j \in J\} \in \tau(a)$, $\beta_{a,M} = \{b_j \mid j \in M \subset J\}$, $c \in 2^A$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ – τ-пучок, порожденный предпучком $\mathcal{A}$:

2) $\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A}) = \check{H}^n_\tau(a, \tilde{\mathcal{A}}) = H^n_\tau(a, \mathcal{A})$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ – τ-пучок, порожденный предпучком $\mathcal{A}$.

В третьем параграфе **«Когомологические размерности нормальных пространств Чу»** рассматриваются задачи когомологической характеристики размерности пространства Чу.

Пусть (A, X) – нормальное пространство Чу. Определим *когомологическую размерность элемента* $a \in 2^A$ следующим образом:

$$c\tau D(a) \leq n \Leftrightarrow H^{n+k}_\tau(a, \mathcal{A}) = 0, \text{ для любого } \tau\text{-пучка } \mathcal{A} \text{ и } \forall k > 0.$$

Если $a = A$, то $c\tau D(A)$ называется когомологической размерностью нормального пространства Чу (A, X) и обозначается $cD(A, X)$.

Теорема 2.3.6. Пусть (A, X) – нормальное пространство Чу, удовлетворяющее условию (1), $\bar{X} \subset X$, и $(A, X)^\perp = (X, B)$. Тогда $Dim^\perp(A, X) = cD(X, B)$, где τ – B-топология Гротендика на 2^X.

Теорема 2.3.7. Пусть (A, X) – отделимое нормальное пространство, удовлетворяющее условию (1) и следующему условию:

$$\forall a \in A, \forall x \in X \ \exists b \in B : q_a \setminus \{x\} = q_b,$$

где $(X, B)^\perp = (A, X)$ и $q_a, q_b \in 2^X$.

Тогда $Dim(A, X) = cD(A, X)$, где τ – X-топология Гротендика на 2^A.

В четвертом параграфе **«Вялые размерности нормальных пространств Чу»** второй главы определяются вялая размерность и размерность Бредона, и устанавливается связь с размерностью пространства Чу.

Определим a-вялый τ-пучок $\mathcal{A}$, где τ – X-топология Гротендика на 2^A, $a \in 2^A$ и $\beta_a = \{b_i \in 2^A \mid i \in I\} \in \tau(a)$ – минимальное τ-покрытие. Положим $\beta_M = \{b_i \mid i \in M\}$, где $M \subseteq I$. τ-пучок $\mathcal{A}$ назовем *a-вялым*, если канонический гомоморфизм $\mathcal{A}(a) \longrightarrow H^0(b \wedge \beta_M, \mathcal{A})$ является эпиморфизмом для любых $b \in 2^A$ и $M \subseteq I$. Если канонический гомоморфизм является эпиморфизмом при $a = A$, тогда будем говорить, τ-пучок $\mathcal{A}$ вялый.

Доказываются следующие свойства a-вялых пучков (лемма 2.4.3, теоремы 2.4.8, 2.4.9):

1) Всякий инъективный τ-пучок является a-вялым;

2) Если τ-пучок $\mathcal{A}$ – a-вялый, то $H^n_\tau(b \wedge \beta_M, \mathcal{A}) = 0$ и $\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A}) = H^n_\tau(a, \mathcal{A}) = 0$ для любых $n \geq 1$, $b \in 2^A$ и $M \subseteq I$, где $\beta_a = \{b_i \in 2^A \mid i \in I\} \in \tau(a)$.

Определим по аналогии с соответствующими топологическими понятиями вялую размерность и размерность Бредона пространств Чу.

Если τ-пучок $\mathcal{A}$ обладает a-вялой резольвентой длины n на нормальном пространстве (A, X), где τ – X-топология Гротендика на 2^A и $a \in 2^A$, и не обладает вялой резольвентой меньшей длины, то говорят, что *a-вялая размерность* $\mathcal{A}$ равна n и обозначают $Bd_{\tau,\mathcal{A}}(a) = n$.

Максимум $Bd_{\tau,\mathcal{A}}(a) = n$ по всем τ-пучкам $\mathcal{A}$ называется *размерностью Бредона $Bd_\tau a$* элемента a. При $a = A$ говорят просто *размерностью Бредона A* и обозначают $Bd\ (A, X)$.

Устанавливается связь размерности нормального пространства Чу и его размерности Бредона, которая вполне аналогична соответствующим результатам для топологических пространств.

Теорема 2.4.14. Пусть (A, X) – нормальное пространство Чу, удовлетворяющее условию (1), $a \in 2^A$ и τ – X-топология Гротендика на 2^A. Тогда $Bd_\tau a \leq \tau Dim(a) + 1$.

В третьей главе **«Примеры и приложения»** показывается, что полученные общие результаты имеют содержательные интерпретации в разных ситуациях. А именно, с частично упорядоченными множествами, структурами событий, информационными системами, сетями Петри ассоциируются нормальные пространства Чу, и размерности, в том числе когомологические и вялые, интерпретируются, как свойства указанных объектов.

В первом параграфе **«Частично упорядоченные множества»** устанавливаются связи между длиной и шириной частично упорядоченного множества с размерностями соответствующих пространств Чу.

Напомним, цепью частично упорядоченного множества $(E, \leq)$ называется такое его подмножество, любые два элемента которого сравнимы, а антицепью частично упорядоченного множества называется такое его подмножество, любые два элемента которого не сравнимы. Говорят, что длина $L(E)$ (соответственно, ширина $W(E)$) частично упорядоченного множества равна n, если существует цепь (соответственно, антицепь), содержащая $n+1$ элемент, и нет цепи (соответственно, антицепи), содержащей большее количество элементов.

Если $(E, \leq)$ – частично упорядоченное множество, то обозначим через $\mathcal{A}_{cE} = (E, cE)$ нормальное пространство Чу определяемое так: $f \in cE$ тогда и только тогда, когда $\{e \in E \mid f(e) = 1\}$ является цепью.

Аналогично, обозначим через $\mathcal{A}_{aE} = (E, aE)$ нормальное пространство Чу определяемое так: $f \in cE$ тогда и только тогда, когда $\{e \in E \mid f(e) = 1\}$ является антицепью.

Теорема L. Пусть $(E, \leq)$ – частично упорядоченное множество, множество cE удовлетворяет условию (1), $\mathcal{A}_{cE} = (E, cE)$ – нормальное пространство Чу, задаваемое цепями множества E, и $(cE, B) = (E, cE)^{\perp}$. Тогда

1) $L(E) - 1 = Dim^{\perp}(E, cE) = cD\ (cE, B)$;

2) $Bd\ (cE, B) \leq L(E)$.

Аналогично получаем следующие результаты.

Теорема W. Пусть $(E, \leq)$ – частично упорядоченное множество, множество aE удовлетворяет условию (1), $\mathcal{A}_{aE} = (E, aE)$ – нормальное пространство Чу, задаваемое антицепями множества E, и $(aE, B) = (E, aE)^{\perp}$. Тогда

1) $W(E) - 1 = Dim^{\perp}(E, aE) = cD\ (aE, B)$;

2) $Bd\ (aE, B) \leq W(E)$.

Во втором параграфе **«Структуры событий»** пространства Чу ассоциируются со структурами событий.

Структурой событий называется тройка $(E, Con, \vdash)$, где E – множество событий, Con – множество не пустых конечных подмножеств множества E и отношение $\vdash \subseteq Con \times E$, удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $X \in Con, Y \subseteq X \Rightarrow Y \in Con$

2) $X \vdash e, X \subseteq Y \in Con \Rightarrow Y \vdash e$.

Через $\mathcal{A}_E = (E, Z)$ обозначим нормальное пространство Чу индуцированное структурой событий $(E, Con, \vdash)$, то есть такое, что область $Z = \{h_{X,e'} \in 2^E \mid X \in Con, e' \in E \cup \{\emptyset\}\}$, где

$$h_{X,e'}(e) = \begin{cases} 1, & X \vdash e \text{ и } e \neq e'; \\ 0, & X \not\vdash e \text{ или } e = e'. \end{cases}$$

Доказан следующий результат (теорема 3.2.4, теорема 3.2.6)

Теорема ES. Пусть $\mathcal{A}_E = (E, Z)$ – нормальное пространство Чу индуцированное структурой событий $(E, Con, \vdash)$ такое, что множество Con удовлетворяет условию (1), и $(Z, B) = (E, Z)^{\perp}$. Тогда

1) $Dim^{\perp}\ (E, Z) = n$ тогда и только тогда, когда из любого $X \in Con$ выводится не более $n + 1$ событие из E и существует $X \in Con$, из которого выводится $n + 1$ событие;

2) $Dim^{\perp}(E, Z) = cD\ (Z, B)$;

3) $Bd\ (Z, B) \leq Dim^{\perp}(E, Z) + 1$.

В третьем параграфе **«Сети Петри»** устанавливаются связи между множествами условий и событий сети Петри с размерностями соответствующих пространств Чу.

Напомним, *сетью Петри* N является четверка, $N = (B, E, F, M_0)$, B – множество *условий (позиций)*, E – множество *событий (переходов)*.

Множество условий и множество событий не пересекаются. Функции $F : (E \times B) \cup (B \times E) \to \{0,1\}$ такие, что функция F определяет структуру ориентированного двудольного графа, множество вершин которого равно $B \cup E$, а стрелками служат такие пары $(a,b) \in (E \times B) \cup (B \times E)$, что $F(a,b) = 1$. M_0 – не пустое подмножество B, называемое *состоянием.* Будем рассматривать сеть Петри только тогда, когда множества B и E – конечные множества.

Определим X_E, X_B, Y_E и Y_B следующим образом:

$X_E = \{h_{b',e} \in 2^B \mid e \in E, b' \in B \cup \{\emptyset\}\}$, где

$$h_{b',e}(b) = \begin{cases} 1, & F(b,e) = 1 \text{ и } b \neq b'; \\ 0, & F(b,e) = 0 \text{ или } b = b'; \end{cases}$$

$Y_E = \{g_{e,b'} \in 2^E \mid e \in E, b' \in B \cup \{\emptyset\}\}$, где

$$g_{e,b'}(b) = \begin{cases} 1, & F(e,b) = 1 \text{ и } b \neq b'; \\ 0, & F(e,b) = 0 \text{ или } b = b'; \end{cases}$$

$Y_E = \{g_{e,b'} \in 2^E \mid e \in E, b' \in B \cup \{\emptyset\}\}$, где

$$g_{e,b'}(b) = \begin{cases} 1, & F(e,b) = 1 \text{ и } b \neq b'; \\ 0, & F(e,b) = 0 \text{ или } b = b'; \end{cases}$$

$Y_B = \{g_{e',b} \in 2^E \mid b \in B, e' \in E \cup \{\emptyset\}\}$, где

$$g_{e',b}(e) = \begin{cases} 1, & F(e,b) = 1 \text{ и } e \neq e'; \\ 0, & F(e,b) = 0 \text{ или } e = e'. \end{cases}$$

Тогда возникают пространства Чу, ассоциированные с сетями Петри (B, X_E), (E, X_B), (B, Y_E) и (E, Y_B).

Доказан следующий результат (теоремы 3.3.3, 3.3.5 и 3.3.6)

Теорема Р. Пусть $N = (B, E, F, M_0)$ – сеть Петри.

1. Если (B, X_E) – нормальное пространство Чу, и $(X_E, D) = (B, X_E)^{\perp}$, то

а) $Dim^{\perp}\ (B, X_E) = n$ тогда и только тогда, когда в любое событие из E входит не более $n+1$ условие из B, и существует событие, в которое входит $n+1$ условие;

b) $Dim^{\perp}\ (B, X_E) = cD\ (X_E, D)$;

c) $Bd\ (X_E, D) \leq Dim^{\perp}\ (B, X_E) + 1$.

2. Если $\mathcal{A}_E^{pre} = (E, X_B)$ – нормальное пространство Чу и $(X_B, D) = (E, X_B)^{\perp}$, то

a) $Dim^{\perp}\ (E, X_B) = n$ тогда и только тогда, когда любое условие из B входит не более, чем в $n+1$ событие из E, и существует условие, в которое входит $n+1$ событие;

b) $Dim^{\perp}(E, X_B) = cD\ (X_B, D)$;

c) $Bd\ (X_B, D) \leq Dim^{\perp}(E, X_B) + 1$.

3. Если $\mathcal{A}_B^{post} = (B, Y_E)$ – нормальное пространство Чу и $(Y_E, D) = (B, Y_E)^{\perp}$, то

a) $Dim^{\perp}\ (B, Y_E) = n$ тогда и только тогда, когда из любого события из E выходит не более $n+1$ условие из B, и существует событие, из которого выходит $n+1$ условие;

b) $Dim^{\perp}(B, Y_E) = cD\ (Y_E, D)$;

c) $Bd\ (Y_E, D) \leq Dim^{\perp}(B, Y_E) + 1$.

4. Если $\mathcal{A}_E^{post} = (E, Y_B)$ – нормальное пространство Чу и $(Y_B, D) = (E, Y_B)^{\perp}$, то

a) $Dim^{\perp}\ (E, Y_B) = n$ тогда и только тогда, когда любое условие из B выходит не более, чем из $n+1$ события из E, и существует условие, из которого выходит $n+1$ событие;

b) $Dim^{\perp}(E, Y_B) = cD\ (Y_B, D)$;

c) $Bd\ (Y_B, D) \leq Dim^{\perp}(E, Y_B) + 1$.

В четвертом параграфе **«Информационные системы»** с каждой информационной системой связываются два пространства Чу.

Информационной системой IS называется тройка $(A, Con, \vdash)$, где A – множество, которое, поскольку речь идет об информационных системах, называется множество единиц информации (*набор данных*), Con – множество не пустых конечных подмножеств множества A, и отношение $\vdash \subseteq Con \times A$ удовлетворяет пяти аксиомам:

$IS1)$ $Y \subseteq X \in Con$, тогда $Y \in Con$

$IS2)$ $\{a\} \in Con$, для любого $a \in A$

$IS3)$ $X \vdash a$, $X \in Con$, тогда $X \cup \{a\} \in Con$

$IS4)$ $a \in X \in Con$, тогда $X \vdash a$

$IS5)$ $X, Y \in Con$ $(\forall b \in Y, X \vdash b)$, $Y \vdash c$, тогда $X \vdash c$

Обозначим через $\mathcal{A}_{IS} = (A, Con)$ нормальное пространство Чу, где Con – область из определения, и через $\mathcal{A}_{IS}^{\#} = (A, Con^{\#})$ нормальное пространство Чу, где $Con^{\#}$ – множество максимальных элементов из множества Con.

Доказан следующий результат (теоремы 3.4.3, 3.4.6 и 3.4.7)

Теорема IS. Пусть $(A, Con, \vdash)$ – информационная система такая, что множество Con удовлетворяет условию (1).

1. Если $\mathcal{A}_{IS} = (A, Con)$ – нормальное пространство Чу и $(Con, B) = (A, Con)^{\perp}$, то

a) $Dim^{\perp}(A, Con)$ тогда и только тогда, когда любой элемент из Con содержит не более $n+1$ единицу информации из A и существует элемент из Con, который состоит из $n+1$ единицы информации;

b) $Dim^{\perp}(A, Con) = cD\ (Con, B)$;

c) $Bd\ (Con, B) \leq Dim^{\perp}(A, Con) + 1$.

2. Если $\mathcal{A}_{IS}^{\#} = (A, Con^{\#})$ – нормальное пространство Чу, то

a) $Dim\ (A, Con^{\#}) = n$ тогда и только тогда, когда любая единица информации содержится не более, чем в $n+1$ максимальном элементе из Con, и существует единица информации, содержащаяся в $n+1$ максимальном элементе из Con;

b) $Dim(A, Con^{\#}) = cD\ (A, Con^{\#})$;

c) $Bd\ (A, Con^{\#}) \leq Dim\ (A, Con^{\#}) + 1$.

Работы автора по теме диссертации

[1] Сухонос А. Г. Существование строгого и полного функтора из Chu_Σ в PS_Σ // Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова. Владивосток: Изд-во ДВГУ. 2003. С. 19.

[2] Сухонос А. Г. Эквивалентность категорий chu и ps // Препринт. Владивосток: Изд-во ИПМ ДВО РАН. 2004. № 19. 20 с.

[3] Сухонос А. Г. Эквивалентность категорий BChu и SPS // XXVI Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ. 2004. С. 121–122.

[4] Сухонос А. Г. Размерность пространств Чу // XXX Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова. Хабаровск: Изд-во ИПМ ДВО РАН. 2005. С. 18.

[5] Сухонос А. Г. Когомологическая характеристика длины частично упорядоченного множества // Препринт. Владивосток: Изд-во ИПМ ДВО РАН. 2006. № 7. 8 с.

[6] Сухонос А. Г. Когомологическая характеристика длины частично упорядоченного множества // Российская школа-семинар «Синтаксис и семантика логических систем». Владивосток: Изд-во ДВГУ. 2008. С. 54–55.

[7] Сухонос А. Г. Когомологическая характеристика длины и ширины частично упорядоченного множества // Международная конференция «Современные проблемы анализа и геометрии». Новосибирск. 2009. С. 115–116.

[8] Сухонос А.Г. Когомологическая характеристика длины и ширины частично упорядоченного множества // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, № 7. С. 217–227.

[9] Сухонос А. Г. Информационные системы и размерность пространств Чу // Материалы 3-й Российской школы-семинар «Синтаксис и семантика логических систем». Иркутск: Изд-во ГОУ ВПО «Восточно-Сибирская государственная академия образования». 2010. С. 105–106.

[10] Сухонос А. Г. Структуры событий и размерность пространств Чу // XXXV Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова. Сборник докладов [электронный ресурс]. Владивосток: Изд-во ИАПУ ДВО РАН. ISBN 978-5-7442-1500-2. 2010. С. 155–156.

[11] Скурихин Е. Е., Сухонос А. Г. Когомологии и размерность пространств Чу // Дальневосточный математический сборник. 2005. Т. 6. С. 14—22.

[12] Скурихин Е. Е., Сухонос А. Г. Топология Гротендика на пространствах Чу // Математические труды. 2008. Т. 1, № 2. С. 159—186.

[13] Skurikhin E.E., Sukhonos A.G. Grothendieck Topologies on Chu Spaces // Siberian Advances in Mathematics. 2009. V. 19, N 3. P. 192–210.

В работах [11, 12, 13] вклад авторов равноценный.

Андрей Григорьевич СУХОНОС

ПУЧКОВЫЕ КОГОМОЛОГИИ И РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ ЧУ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 07.07.2011 г. Формат 60x84/16.
Печать офсетная. Усл. п. л. 1,0. Уч.-изд. л. 0,82.
Тираж 100 экз. Заказ 78

Отпечатано в типографии ФГУП Издательство «Дальнаука» ДВО РАН
690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7

18.2